

第三章 线性方程组 测试题

一、单项选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

$$1. \text{设线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

如果 $s < n$, 那么 $\textcircled{1}$ ()

- (A) 无解; (B) 有唯一解; (C) 有无穷多解; (D) 无法判别解的情况.

2. 设向量组 I 是向量组 II 的部分组, 那么 ()

- (A) 如果 I 线性无关, 那么 II 也线性无关;
 (B) 如果 II 线性无关, 那么 I 也线性无关;
 (C) 如果 II 线性相关, 那么 I 也线性相关;
 (D) 如果 II 线性相关, 那么 I 也线性无关.

$$3. \text{设齐次线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

只有零解, A 表示其系数矩阵, 那么 ()

- (A) A 的列向量线性相关; (B) A 的列向量性无关;
 (C) A 的行向量线性无关; (D) A 的行向量线性相关.

4. 如果矩阵 A 的秩为 r , 那么 ()

- (A) A 的任意 r 级子式不为 0, 且所有 $r+1$ 级子式为 0;
 (B) A 的任意 r 级子式不为 0, 且存在一个 $r+1$ 级子式为 0;
 (C) 存在 A 的一个 r 级子式不为 0, 且所有 k ($k > r$) 级子式为 0;
 (D) 存在 A 的一个 r 级子式为 0, 且所有 $r+1$ 级子式不为 0.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次方程组 $\textcircled{1}$ 的解向量, 那么 () 是其导出解的解向量。

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (C) $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ (D) $3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3$

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ 的秩为_____。

2. 如果方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (t+2)x_3 = 3 \\ x_1 + tx_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ 无解, 那么 $t =$ _____。

3. 线性方程组 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$ 基础解系为_____。

4. 如果向量组 $\alpha_1 = (k, 1, 1), \alpha_2 = (0, 2, 4), \alpha_3 = (1, 2, 3)$ 线性相关, 那么 $k =$ _____。

5. 如果向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1, 1), \alpha_4 = (1, 0, 0, 1)$ 的一个极大无关组为_____。

三、判断题 (每小题 2 分, 共 10 分)

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是任意 n 维向量组, $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 - \alpha_1$, 那么, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 必线性相关。 ()
- 等价的向量组有相同的极大无关组。 ()
- 设 A 是 n 级方阵, 那么 A 的行向量线性无关当且仅当 A 的列向量线性无关。 ()
- 如果非齐次线性方程组①的系数矩阵的秩小于 n , 那么①的基础解系一定存在, 但不一定是唯一的。 ()
- 非齐次线性方程组的任意两个解向量的和仍是它的解。 ()

四、当 a, b 取何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3 \\ -3ax_2 + (a+2b)x_3 = -3 \end{cases}$$
 无解? 有唯一解? 有无穷多解?

五、已知方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$
 求它的导出组的基础解系和原方程组的通解。

六、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 证明 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示形式唯一。

七、设 γ 是非齐次方程组①的一个特解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 为其导出组的基础解系, 证明 $\gamma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关。

八、已知 $\alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = (-3, 2, 2)$ 是方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$$
 的两个解, 求此方程的一般解。

九、设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次方程组②的基础解系, $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_t, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_t, \beta_t = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{t-1}$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也是方程组②的基础解系。

十、求一个齐次线性方程组, 使它以 $\eta_1 = (0, 1, 2, 3), \eta_2 = (3, 2, 1, 0)$ 为基础解系。