第五章　二次型测试题

一、单选题：

（1）以 $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 为矩阵的二次型为（　　）

A）$x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$；　　B）$2\sqrt{2}x_1x_2-3x_2^2+x_1x_3-\frac{3}{2}x_2x_3$；

C）$\sqrt{2}x_1x_2+3x_2^2+2x_1x_3-3x_2x_3$；　　D）$x_1x_2+3x_2^2+x_1x_3-\frac{3}{2}x_2x_3$.

（2）二次型 $f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的矩阵为（　　）

A）$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$；　　B）$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$；

C）$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$；　　D）$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

（3）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2$ 的正惯性指数为_____

A）3;　　B）2 ;　　C）1 ;　　D） 0 .

（4）设 A 是实对称矩阵，二次型 $f(X)=X'AX$ 正定的充要条件是____________。

A）|A| >0;　　B）负惯性指数为 0 ;

C）A 的所有主对角线上的元素大于 0;　　D）存在可逆矩阵 C，使 $A=C'C$.

（5）设 A 是任意实矩阵，那么二次型 $f(x)=X'A'AX$ 必是（　　）

A）半正定;　B）半负定;　C）正定;　D）负定.

二、 填空题：

（1）二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 的矩阵为____________。

（2）设 $\alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},A=\alpha\alpha',f(X)=X'AX,$ 那么 $f(\beta)$=___________。

（3）若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$正定，那么 t 满足________。

（4）若矩阵 A 与矩阵$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$合同，则二次型 $f=X'AX$ 的规范形为_______。

（5）设 A 是反对称矩阵，那么二次型 $f=X'AX=$__________

三、用非退化线性替换化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$为标准形和规范形，写出所作的线性替换，并确定 f 的正、负惯性指数和符号差。

四、设$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\2&1&3\end{bmatrix}$，求一个可逆矩阵 C，使$C'AC$为对角形。

五、λ 取何值时，二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$正定？

六、设 A_1 与 A_2 合同，B_1 与 B_2 合同，证明：$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B_1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}$合同。

七、设 A 为实反对称矩阵，证明$E-A^2$正定。

八、设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，且 $m<n$，证明 AA' 正定<=>A 的秩为 m.