第六章 线性空间 测试题

一、填空题

（1） 已知 R^3 的两组基 Ⅰ $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(0,0,1)$；

Ⅱ $\beta_1=(1,0,1),\beta_2=(0,1,1),\beta_3=(1,1,0)$

那么由Ⅱ到Ⅰ的过渡矩阵为____________________________。

（2）在 $P^{2\times 2}$ 中，已知 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$是

$P^{2\times 2}$ 的基，那么，$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$在该基下的坐标为______________________。

（3）设 W_1 是方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 解空间，W_2 是方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=0\\x_1+x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$

那么 $W_1\cap W_2$ 是方程组________________的解空间。

（4）设 $W_1=\left(L\left((1,1,0),(1,0,1)\right), W_2=L\left((0,1,1),(1,2,3)\right)\right.$ $\dim\left(W_1+W_2\right)=$____________。

（5）设 W_1、W_2 都是 V 的子空间，且 W_1+W_2 为直和，那么 $\dim\left(W_1\cap W_2\right)=$_________。

二、判断题：

（1）一个线性方程组的全体解向量必做成一个线性空间。（ ）

（2）实数域 R 上的全体 n 几级可逆矩阵做成 $P^{n\times n}$ 的子空间。（ ）

（3）齐次线性方程组的解空间的维数等于自由未知数的个数。（ ）

（4）线性空间 V 中任意两个子空间的并集仍是 V 的子空间。（ ）

（5）在子空间的和 W_1+W_2 中，如果 $0=\alpha_1+\alpha_2(\alpha_1\in w_1,\alpha_2\in w_2)$，且这种表示形式唯一，

那么 W_1+W_2 为直和。（ ）

三、在 $P^{2\times 2}$ 中，$G_1=\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix}, G_2=\begin{pmatrix}1&a\\1&1\end{pmatrix}, G_3=\begin{pmatrix}1&1\\a&1\end{pmatrix}, G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}$

当a为何值时，G_1,G_2,G_3,G_4线性相关？

当a为何值时，G_1,G_2,G_3,G_4线性无关？

四、设$P[x]_3=\{a_o+a_1x+a_2x^2\mid a_o,a_1,a_2\in P\}$

（1）证明 1，$x-1,x^2-1$是$P[x]_3$的基，并求由该基到基$x^2,x,1$的过渡矩阵。

（2）求$f(x)=1+x+x^2$在基 1，$x-1,x^2-1$下的坐标。

五、设 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2),\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(0,1,1)$，$W_2$是齐次方程$x_1+x_2+x_3=0$的解空间，求$W_1+W_2$，$W_1\cap W_2$的一组基和维数。

六、设$V=\{(a+bi,c+di)\mid a,b,c,d\in R,i^2=-1\}$把 V 看成 R 上的线性空间，证明：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(i,0),\alpha_3=(0,1),\alpha_4=(0,i)$是 V 的一组基。

七、设 $A^2=A,W_1$是$AX=0$ 的解空间，W_2是 $(A-E)X=0$ 的解空间，证明：$W_1\oplus W_2=P^n$。

八、设$W=\{(a,a+b,a-b)\mid a,b\in R\}$证明：

（1）W关于R^3中的向量的加法和数乘运算做成R上的线性空间。

（2）$W\cong R^2$。