第七章——线性变换　测试题

一、填空题：

1．设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，线性变换 $\mathscr{B}$ 在基 $\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，那么 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为_______________.

2．设矩阵 A 的特征为 1，2，3，那么 A^{-1} 的特征值为__________。

3．设 A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}$与矩阵 B=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$相似，那么 x,y 的值分别是________。

4．设 A=$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$\mathscr{A}$(X)=AX 是 P^3 上的线性变换，那么 $\mathscr{A}$ 的零度=__________。

5．在 $P[x]_3$ 中，定义 $\mathscr{D}$（$f(x))=f'(x)$，那么 $\mathscr{D}$ 的特征值为_______。

二、判断题

1．设 α 是 V 中固定非零向量，$\forall\xi\in V$，$\mathscr{A}(\xi)=\xi+\alpha$，那么 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换。（　　）

2．设 V=$P^{2\times2}$，$L\leftarrow$(V)是 V 上的全体线性变换组成的空间，那么 $L\leftarrow$（V）的维数=4。（　　）

3．两个矩阵 A，B 有相同的特征值，则 A～B。（　　）

4．设线性变换 $\mathscr{A}$ 在给定基下的矩阵为 A，那么 $\mathscr{A}$ 的值域的维数等于 A 的秩。（　　）

5.线性变换 $\mathscr{A}$ 的核与值域的交是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。（　　）

三、 $P[x]_3$ 表示次数小于 3 的多项式连同零组成的线性空间，定义

$\mathcal{A}(f(x)) = xf'(x) - f(x)$

1. 证明 $\mathcal{A}$ 是 $p[x]_3$ 上的线性变换。

2．求 $\mathcal{A}$ 在基 1， $x-1, x^2-1$ 下的矩阵。

3．说明 $\mathcal{A}$ 是否可以对角化？若可以对角化，找出一组基，使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为对角形。

四、在 P^{2x2} 上定义线性变换 $\mathcal{A}X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X$

（1）求 $\mathcal{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵；

（2）求 $\mathcal{A}$ 的核和它的零度。

（3）求 $\mathcal{A}$ 的值域和 $\mathcal{A}$ 的秩。

五、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（1）求 A 的全部特征值。

（2）求 A 的属于每个特征值的特征向量。

（3）求一个可逆矩阵 X ，使 $X^{1}AX$ 为对角形。

六、设 V 是 n 维线性空间，$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换，λ, μ 为 $\mathcal{A}$ 的不同特征值。

（1） 证明特征子空间 V_λ 是 $\mathcal{A}$ 一子空间。

（2）证明 $(V_\lambda + V_\mu)$ 的维数=V_λ 的维数+V_μ 的维数。

七、设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\mathcal{A}^2$ 为单位变换。证明：

（1）$\mathcal{A}$ 的特征值只能是 ± 1

（2） $V = V_1 \oplus V_{-1}$ 其中 $V_1 = \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}\alpha = \alpha\}$ $V_{-1} = \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}\alpha = -\alpha\}$