第九章 欧氏空间 检测题

一、填空题：

（1）在欧氏空间 R^4 中，$\alpha=(1,2,2,3,),\beta=(3,1,5,1)$ 则 α,β 的夹角为__________。

（2）在线性空间 R^3 中，$\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)$ 定义 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$，在这种内积下向量 $\alpha=(1,2,3)$ 的长度为 $|\alpha|=$____________。

（3）按通常向积定义的 R^2 中，基 $\alpha_1=(1,1),\ \alpha_2=(1,-1)$ 的度量矩阵为___________。

（4）$R[x]_2=\{a_0+a_1x \mid a_0,a_1\in R\}$ 中定义内积为 $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$，该欧氏空间的一组标准正交基为________________。

（5）若 A 为正交阵，E 为单位矩阵，且 $|A|=-1$，则 $|A+E|=$____________。

二、判断题

（1）正交变换关于任意基的矩阵为正交矩阵。（　　）

（2）设欧氏空间中某基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为 A，那么 A 的特征值必大于 0。（　　）

（3）正交变换的属于不同特征值的特征向量必正交。（　　）

（4）在 R^3 中，$\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)$ 定义由积为 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$，那么 $\varepsilon_1=(1,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 必为 R^3 的标准正交基。（　　）

（5）设 W_1，W_2 是欧氏空间 V 的子空间，如果 $w_1\perp w_2$，那么 $w_1\cap w_2=\{0\}$。（　　）

三、求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1-x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$ 的解空间 W 的一组标准正交基。

四、已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似。

（1）求 x,y 的值。

（2）求正交阵 T，使 $T^{-1}AT=B$

五 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$

用正交线性替换化 f 为标准形，并判别该二次型是否正定。

六 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n,\ \beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$，定义 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$，证明

（1）V 关于以上内积作成欧氏空间。

（2）$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基。

七、设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 上的对称变换，W 是 V 的 $\mathcal{A}$-子空间，证明 W 的正交补 W 也是 $\mathcal{A}$-子空间。

八、如果欧氏空间 V 上的变换 $\mathcal{A}$ 保持内积不变，即 $\forall\alpha\in V$，（$\mathcal{A}\alpha$，$\mathcal{A}\beta$ ）= (α,β)，证明 $\mathcal{A}$ 必为线性变换，从而是正交变换。

九、设 $\mathcal{A}$ 既是欧氏空间 V 的正交变换也是对称变换，证明存在 V 的一组标准正交基，使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

十、在 $R[x]_4$ 中定义内积：$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

取两个子空间，$V_1=L(1,x),V_2=L\left(x^2-\frac{1}{3},x^3-\frac{3}{5}x\right)$，证明 V_1，V_2 互为正交补。